Môn Học :

PHƯƠNG PHÁP SỐ .

GV : Th.S Nguyễn Tấn Phúc.
Bộ môn Cơ Điện Tử.

Email: phucnt@hcmuaf.edu.vn.
Tel : 01267102772.

Môn Học :

PHƯƠNG PHÁP SỐ .

GV : Th.S Nguyễn Tấn Phúc.
Bộ môn Cơ Điện Tử.

Email: phucnt@hcmuaf.edu.vn.
Tel : 01267102772.

Chương 4 :

NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

NỘI DUNG CHƯƠNG:

I) ĐẶT BÀI TOÁN.

II) NỘI SUY THEO HÀM LAGRANGE

III) XẤP XĨ THỰC NGHIỆM - PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Để tính giá trị của một hàm liên tục bất kỳ, ta có thể xấp xỉ hàm bằng một đa thức, tính giá trị của đa thức từ đó tính được giá trị gần đúng của hàm.

Xét hàm y = f(x) cho dưới dạng bảng số

x	x_o	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_o	y_1	y_2	. . .	y_n

- Các giá trị x_k, k = 0, 1, .., n được sắp theo thứ tự tăng dần gọi là các điểm nút nội suy.
- Các giá trị $y_k = f(x_k)$ là các giá trị cho trước của hàm tại x_k

Bài toán : xây dựng 1 đa thức $p_n(x)$ bậc $\leq$n thoả điều kiện $p_n(x_k) = y_k$, k=0,1,.. n. Đa thức này gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

II. ĐA THỨC NỘY SUY LAGRANGE:

Cho hàm y = f(x) và bảng số

x	x_o	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_o	y_1	y_2	. . .	y_n

Ta xây dựng đa thức nội suy hàm f(x) trên $[a,b]=[x_0, x_n]$.

Đặt

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Ta có

$$p_n^{(k)}(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Đa thức

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k$$

có bậc $\leq$ n và thỏa điều kiện $L_n(x_k) = y_k$

gọi là đa thức nội suy Lagrange của hàm f

Ví dụ : Cho hàm f và bảng số

x	0	1	3
y	1	-1	2

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange và tính gần đúng f(2).

Giải

n = 2 $$p_n^{(0)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2-4x+3)$$

$$p_n^{(1)}(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2-3x)$$

$$p_n^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2-x)$$

Đa thức nội suy Lagrange

$$L_n(x) = \frac{1}{3}(x^2-4x+3) + \frac{1}{2}(x^2-3x) + \frac{1}{3}(x^2-x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{19}{6}x + 1$$

$f(2) \approx L_n(2) = -2/3$

Ví dụ : Cho hàm f và bảng số

x	-9	-7	-4
y	-1	-4	-9

Tính gần đúng f(-6) theo đa thức Lagrage.

GIẢI $\qquad n = 2$

$$p^0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+7)(x+4)}{(-9+7)(-9+4)} = \frac{(x+7)(x+4)}{10}$$

$$p^1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+9)(x+4)}{(-7+9)(-7+4)} = -\frac{(x+9)(x+4)}{6}$$

$$p^2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+9)(x+7)}{(-4+9)(-4+7)} = -\frac{(x+9)(x+7)}{15}$$

L=$y_0.p^0 + y_1 p^1 + y_2 p^2$

= -$\frac{(x+7)(x+4)}{10}$+ 4/6(x+9)(x+4)+ 9/15(x+9)(x+7).

=35/30 x^2+515/30 x+ 59.

Thay x=-6 vào L(-6)= -2

Vậy giá trị nội suy là -2.

Ví dụ : Cho hàm f và bảng số

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Tính gần đúng giá trị hàm số f tại x=2 bằng phương pháp Lagrange.

IV.BÀI TOÁN XẤP XỈ THỰC NGHIỆM :

Xét bài toán thống kê lượng mưa trong 12 tháng Thực nghiệm (k=1..12)

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	550	650	540	580	610	605	......	

Các giá trị y_k được xác định bằng thực nghiệm nên có thể không chính xác. Khi đó việc xây dựng một đường cong đi qua tất cả các điểm $M_k(x_k, y_k)$ cũng không còn chính xác

Bài toán xấp xỉ thực nghiệm : là tìm hàm f(x) xấp xỉ bảng $\{(x_k,y_k)\}$ theo phương pháp bình phương cực tiểu :

$$g(f)=\sum (f(x_k)-y_k)^2 \ \textit{đạt}\ \min$$

Hàm f tổng quát rất đa dạng. Để đơn giản, trong thực tế thường ta tìm hàm f theo một trong các dạng sau :

- $f(x) = A + Bx$
- $f(x) = A+Bx+Cx^2$
- $f(x) = A\sin x+B\cos x$
- $f(x) = Ae^{Bx}$
- $f(x) = Ax^B$

.....

1. Trường hợp f(x) = A+ Bx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (A + Bx_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A + Bx_k - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A + Bx_k - y_k)x_k = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B = \sum x_k y_k \end{cases}$$

Suy ra: A, B.

Ví dụ : Tìm hàm f(x) = A + Bx xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Theo pp BPCT

Ta có n = 10

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B = \sum x_k y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10A + \ 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.7671, B=1.0803

Vậy f(x) = 0.7671+1.0803 x

2. Trường hợp f(x) = Acosx + Bsinx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B)=\sum(A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng
$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial A}=2\sum(A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)\cos x_k = 0\\ \dfrac{\partial g}{\partial B}=2\sum(A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)\sin x_k = 0\end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases}(\sum\cos^2 x_k)A+(\sum\sin x_k\cos x_k)B=\sum y_k\cos x_k\\ (\sum\sin x_k\cos x_k)A+(\sum\sin^2 x_k)B=\sum y_k\sin x_k\end{cases}$$

Suy ra: A,B

Ví dụ : Tìm hàm f(x)=Acosx+Bsinx xấp xỉ bảng số

x	10	20	30	40	50	rad
y	1.45	1.12	0.83	1.26	1.14	

Theo pp BPCT

Ta có n = 5

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum \cos^2 x_k)A + (\sum \sin x_k \cos x_k)B = \sum y_k \cos x_k \\ (\sum \sin x_k \cos x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.2703A - 0.0735B = -0.3719 \\ -0.0735A + 2.7297B = 0.0533 \end{cases}$$

Nghiệm A = -0.1633, B=0.0151

Vậy f(x) = -0.1633cosx+0.0151sinx

3. Trường hợp f(x) = Ax^2 + Bsinx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B)=\sum(Ax_k^2+B\sin x_k-y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng
$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial A}=2\sum(Ax_k^2+B\sin x_k-y_k)x_k^2=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial B}=2\sum(Ax_k^2+B\sin x_k-y_k)\sin x_k=0\end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases}(\sum x_k^4)A+(\sum x_k^2\sin x_k)B=\sum x_k^2y_k\\ (\sum x_k^2\sin x_k)A+(\sum\sin^2 x_k)B=\sum y_k\sin x_k\end{cases}$$

Suy ra:A,B.

Ví dụ : Tìm hàm f(x)=Ax^2+Bsinx xấp xỉ bảng số

x	1.3	1.5	1.8	2.0	2.4	2.6	2.7
y	2.7	1.8	3.51	3.1	3.78	3.9	4.32

Theo pp BPCT

Ta có n =7

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum x_k^4)A + (\sum x_k^2 \sin x_k)B = \sum x_k^2 y_k \\ (\sum x_k^2 \sin x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 166.4355A + 21.1563B = 112.015 \\ 21.1563A + \ \ 4.6033B = 17.0441 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.4867, B=1.4657

Vậy f(x) = 0.4857x^2 + 1.4657sinx

4. Trường hợp f(x) = A+ Bx+Cx²:

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B,C) = \sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 3 biến g(A,B,C)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial C} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B + (\sum x_k^2)C = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B + (\sum x_k^3)C = \sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A + (\sum x_k^3)B + (\sum x_k^4)C = \sum x_k^2 y_k \end{cases}$$

Suy ra: A,B,C

Ví dụ : Tìm hàm $f(x) = A + Bx + Cx^2$ xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

Theo pp Bình Phương cực tiểu.

GIẢI

$n = 7$

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B + (\sum x_k^2)C = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B + (\sum x_k^3)C = \sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A + (\sum x_k^3)B + (\sum x_k^4)C = \sum x_k^2 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7A + 19B + 65C = 61.70 \\ 19A + 65B + 253C = 211.04 \\ 65A + 253B + 1061C = 835.78 \end{cases}$$

Nghiệm A = 4.3, B=-0.71, C=0.69

Vậy $f(x) = 4.3 - 0.71x + 0.69x^2$

KẾT THÚC CHƯƠNG 4...